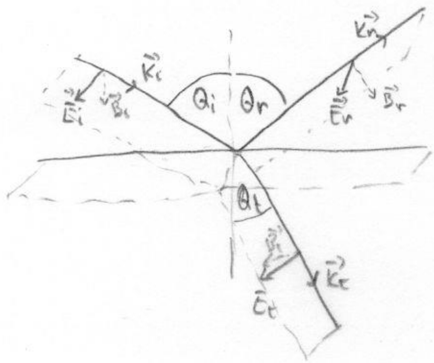
– Френелове формуле –

Амплитудни коефицијенти рефлексије и трансмисије:

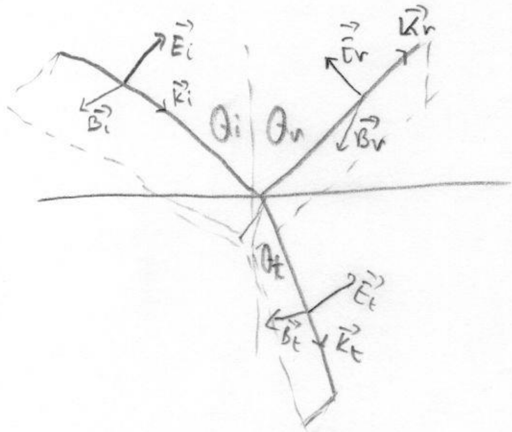
$$r_\perp \equiv \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\perp = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

$$t_\perp \equiv \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_\perp = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$



$$r_\parallel \equiv \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\parallel = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i}$$

$$t_\parallel \equiv \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_\parallel = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i}$$



$$I = c\varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle$$

$$n = \frac{c_0}{c}$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)^2 = r^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} t^2$$

Написати изразе за амплитудне коефицијенте рефлексије као функције углова θ_i и θ_t, елиминишући у изразима зависност од n_i и n_t

Решење:

$$r_\perp = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

$$r_\perp = \frac{n_i\left(\cos\theta_i - \frac{n_t}{n_i}\cos\theta_t\right)}{n_i\left(\cos\theta_i + \frac{n_t}{n_i}\cos\theta_t\right)} = \frac{\cos\theta_i - \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}\cos\theta_t}$$

$$r_\perp = \frac{\cos\theta_i \sin\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_t}{\cos\theta_i \sin\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_t}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\boxed{r_\perp = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_i \left(\frac{n_t}{n_i} \cos\theta_i - \cos\theta_t \right)}{n_i \left(\cos\theta_t + \frac{n_t}{n_i} \cos\theta_i \right)} = \frac{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} \cos\theta_i - \cos\theta_t}{\cos\theta_t + \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} \cos\theta_i}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i \cdot 1 - \sin\theta_t \cos\theta_t \cdot 1}{\sin\theta_t \cos\theta_t \cdot 1 + \sin\theta_i \cos\theta_i \cdot 1}$$

$$1 = \sin^2\theta_t + \cos^2\theta_t$$

$$1 = \sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i$$

$$r_{\parallel} = \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i \left(\sin^2\theta_t + \cos^2\theta_t \right) - \sin\theta_t \cos\theta_t \left(\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i \right)}{\sin\theta_t \cos\theta_t \left(\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i \right) + \sin\theta_i \cos\theta_i \left(\sin^2\theta_t + \cos^2\theta_t \right)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i \sin^2\theta_t + \boxed{\sin\theta_i \cos\theta_i \cos^2\theta_t} - \sin\theta_t \cos\theta_t \sin^2\theta_i \boxed{- \sin\theta_t \cos\theta_t \cos^2\theta_i}}{\sin\theta_t \cos\theta_t \sin^2\theta_i + \boxed{\sin\theta_t \cos\theta_t \cos^2\theta_i} + \sin\theta_i \cos\theta_i \sin^2\theta_t + \boxed{\sin\theta_i \cos\theta_i \cos^2\theta_t}}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\cos\theta_i \cos\theta_t \left(\sin\theta_i \cos\theta_t - \sin\theta_t \cos\theta_i \right) + \sin\theta_i \sin\theta_t \left(\cos\theta_i \sin\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_t \right)}{\cos\theta_i \cos\theta_t \left(\cos\theta_i \sin\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_t \right) + \sin\theta_i \sin\theta_t \left(\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t \right)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\left(\sin\theta_i \cos\theta_t - \sin\theta_t \cos\theta_i \right)\left(\cos\theta_i \cos\theta_t - \sin\theta_i \sin\theta_t \right)}{\left(\sin\theta_i \cos\theta_t + \sin\theta_t \cos\theta_i \right)\left(\cos\theta_i \cos\theta_t + \sin\theta_i \sin\theta_t \right)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\left(\sin\theta_i \cos\theta_t - \cos\theta_i \sin\theta_t \right)\left(\cos\theta_i \cos\theta_t - \sin\theta_i \sin\theta_t \right)}{\left(\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t \right)\left(\cos\theta_i \cos\theta_t + \sin\theta_i \sin\theta_t \right)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$r_{\parallel} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_i) \cos(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\boxed{r_{\parallel} = \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_i)}}$$

Нека је дат линеарно поларизован талас који упада на раздвојну површину две средине различите оптичке густине, тако да је раван осциловање светлосног вектора под углом γ_i у односу на упадну раван. Уколико су коефицијенти рефлексије паралелне и нормалне компоненте у односу на упадну раван $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ напишите израз за укупну рефлексију R.

Решење:

$$R = \frac{I_r}{I_i}$$

$$I_r = I_{r\parallel} + I_{r\perp}$$

$$R = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i} = \frac{I_{r\parallel}}{I_i} + \frac{I_{r\perp}}{I_i}$$

Како је:

$$(E_{0i})_{\parallel} = E_{0i} \cos\gamma_i$$

$$(E_{0i})_{\perp} = E_{0i} \sin\gamma_i$$

$$I = c\varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle$$

$$I_{i\parallel} = I_i \cos^2\gamma_i \qquad I_{i\perp} = I_i \sin^2\gamma_i$$

$$I_i = \frac{I_{i\parallel}}{\cos^2\gamma_i} \qquad I_i = \frac{I_{i\perp}}{\sin^2\gamma_i}$$

$$R = \frac{I_{r\parallel}}{I_i} + \frac{I_{r\perp}}{I_i}$$

$$R = \frac{I_{r\parallel}}{I_{i\parallel}} \cos^2\gamma_i + \frac{I_{r\perp}}{I_{i\perp}} \sin^2\gamma_i$$

$$\boxed{R = R_\parallel \cos^2\gamma_i + R_\perp \sin^2\gamma_i}$$

На аналоган начин може се показати и за трансмисију

$$\boxed{T = T_\parallel \cos^2\gamma_i + T_\perp \sin^2\gamma_i}$$

Природна или неполаризована светлост је таква да се раван осцилације светлосног вектора мења насумично, као и амплитуда поља. Извести израз за коефицијент рефлексије природне светлости R_n, преко $R_\perp$ и $R_\parallel$.

Решење:

$$R_n = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i}$$

(претходни задатак)

$$R_n = R_\parallel \langle \cos^2 \gamma_i \rangle + R_\perp \langle \sin^2 \gamma_i \rangle$$

За неполаризовану светлост потребно је усреднити вредности поља у интервалу једног периода

$$\langle \cos^2 \gamma_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \gamma_i \, dt \quad ; \ \gamma_i = \gamma_i(t)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\langle \cos^2 \gamma_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1+\cos 2\gamma_i}{2} dt = \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T dt + \frac{1}{2T} \cancel{\int_0^T \cos 2\gamma_i \, dt}^{\,0}$$

$$\langle \cos^2 \vartheta_i \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin^2 \vartheta_i \rangle = \frac{1}{2}$$

$$R_n = \frac{1}{2} R_{\parallel} + \frac{1}{2} R_{\perp}$$

$$R_n = \frac{1}{2} \left(R_{\parallel} + R_{\perp} \right)$$

kako je $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ i $R_{\perp} = r_{\perp}^2$

$$R_n = \frac{1}{2} \left(r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2 \right)$$

Слика месеца који се налази под углом $\alpha = 20°$ изнад хоризонта одражава се на мирној површини мора ($n = 1{,}33$).

а) Одредити колико је сјајна слика у поређењу са самим Месецом ако је Месечева светлост неполаризована

б) За ли би слика Месеца била сјајнија ако би се он налазио у зениту?

Решење:

Однос интензитета рефлектоване и упадне светлости представља коефицијент рефлексије R.

$$\frac{I_{r\parallel}}{I_i} = \frac{1}{2} R_\parallel \; ; \; \frac{I_{r\perp}}{I_i} = \frac{1}{2} R_\perp$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} \qquad R = \frac{I_{r\parallel}}{I_i} + \frac{I_{r\perp}}{I_i}$$

$$I_{r\parallel} = \frac{I_i}{2} r_\parallel^2 \; ; \; I_{r\perp} = \frac{I_i}{2} r_\perp^2$$

$$R = \frac{1}{2}(R_\parallel + R_\perp)$$

$$I_r = I_{r\parallel} + I_{r\perp} \qquad R = \frac{1}{2}(r_\parallel^2 + r_\perp^2)$$

За неполаризовану светлост

$$I_{r\parallel} = \frac{I_i}{2} \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$I_{r\perp} = \frac{I_i}{2} \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_i)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_t$$

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\theta_i\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} + \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)}\right)$$

$$\theta_i = 70^\circ$$

$$\theta_t \approx 45^\circ$$

$$K = \frac{I_r}{I_i} = 0{,}132$$

Када је месец 20° изнад хоризонта 13,2% сјаја Месеца се рефлектује од водене површине.

б) Месец у зениту, $\theta_i, \theta_t \to 0$

$$\sin(\theta_i - \theta_t) \approx tg(\theta_i - \theta_t) \approx \theta_i - \theta_t$$

$$\sin(\theta_i + \theta_t) \approx tg(\theta_i + \theta_t) \approx \theta_i + \theta_t$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(\theta_i - \theta_t)^2}{(\theta_i + \theta_t)^2}$$

Закон преламања:

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_t$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = n$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} \overset{\theta_i,\theta_t \to 0}{\approx} \frac{\theta_i}{\theta_t} = n$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{\left(\frac{\theta_i}{\theta_t} - 1\right)^2}{\left(\frac{\theta_i}{\theta_t} + 1\right)^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 0{,}02$$

У зениту Месечева слика на површини воде има

света 2% сјаја самог Месеца